Уравнение неразрывности

Закон сохранения массы:

ПОСТУПЛЕНИЕ - ВЫНОС = НАКОПЛЕНИЕ

Поток массы $M=\Delta m/\Delta t= \rho(x)\Delta x\Delta y\Delta z\ /\Delta t$

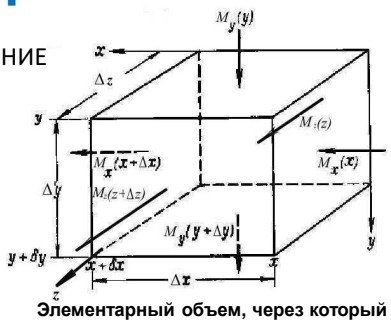
Втекает через грань x:

$$M_x(x)=v_x(x)\rho(x)\ \Delta y\Delta z$$

Вытекает через грань $(x+\Delta x)$:

$$M_x(x+\Delta x)=v_x(x+\Delta x)\rho(x+\Delta x)\Delta y\Delta z.$$

Аналогично через другие грани



Элементарный объем, через который проходит поток вещества

Изменение:

$$\Delta M_x=v_x(x+\Delta x)\rho(x+\Delta x)\ \Delta y\Delta z - v_x(x)\rho(x)\ \Delta y\Delta z = \Delta(\rho v)_x\ \Delta y\Delta z$$
$$\Delta M_y=v_y(y+\Delta y)\rho(y+\Delta y)\ \Delta x\Delta z - v_y(y)\rho(y)\ \Delta x\Delta z = \Delta(\rho v)_y\ \Delta x\Delta z$$
$$\Delta M_z=v_z(z+\Delta z)\rho(z+\Delta z)\ \Delta x\Delta y - v_z(z)\rho(z)\ \Delta x\Delta y = \Delta(\rho v)_z\ \Delta x\Delta y.$$

ПОСТУПЛЕНИЕ-ВЫНОС = $-\ (\Delta M_x + \Delta M_x + \Delta M_x)\Delta t$

НАКОПЛЕНИЕ = $(\rho_2-\rho_1)\Delta V = (\rho_2-\rho_1)\Delta x\Delta y\Delta z = \Delta\rho_t\Delta x\Delta y\Delta z$

закон сохранения массы:

ПОСТУПЛЕНИЕ - ВЫНОС = НАКОПЛЕНИЕ

$$-\ (\Delta M_x + \Delta M_y + \Delta M_z)\Delta t = \Delta\rho_t\Delta x\Delta y\Delta z,$$

$$-\ (\Delta(\rho v)_x\ \Delta y\Delta z + \Delta(\rho v)_y\ \Delta x\Delta z + \Delta(\rho v)_z\ \Delta x\Delta y)\Delta t = \Delta\rho_t\Delta x\Delta y\Delta z$$

Делим на $\Delta t\Delta x\Delta y\Delta z$, получаем

$$\frac{\Delta(\rho v)_x}{\Delta x}+\frac{\Delta(\rho v)_y}{\Delta y}+\frac{\Delta(\rho v)_z}{\Delta z}+\frac{\Delta\rho_t}{\Delta t}=0\ ,$$

или, переходя к пределу при $\Delta t\Delta x\Delta y\Delta z \to 0$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho v)_x}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)_y}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v)_z}{\partial z}+\frac{\partial\rho_t}{\partial t}=0} \quad \text{или} \quad \boxed{div\,(\rho v)+\frac{\partial\rho_t}{\partial t}=0}$$

Если жидкость несжимаемая ($\rho(t)$=const), то получаем **уравнение неразрывности** несжимаемой жидкости:

$$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0} \quad \text{или} \quad \boxed{div\ \boldsymbol{v}=0} \qquad \textbf{(2)}$$

Потенциальное течение

Если жидкость идеальная (т.е. ее вязкость η = 0), то отсутствует внутреннее трение, поэтому течение безвихревое, ламинарное.
Тогда компоненты скорости могут быть выражены независимо друг от друга. Для этого вводят новую скалярную функцию Ф = Ф *(x,y,z)* - потенциал скорости - таким образом, что

$$v_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; v_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}; v_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial y},$$ т.е. $v = -\left(i\frac{\partial \Phi}{\partial x} + j\frac{\partial \Phi}{\partial y} + k\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$

или, $v = -grad\Phi; \quad v = -\nabla\Phi.$

Уравнение Лапласа

Для идеальной (вязкость η=0) несжимаемой (плотность ρ=const) жидкости течение потенциально, и компоненты скорости могут быть выражены через потенциал скорости Ф. Подставляем эти выражения в уравнение неразрывности (3.11):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = 0,$$

или $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$

Или: $div\ grad\ \Phi = 0 \qquad \nabla^2\Phi = 0 \qquad \Delta\Phi = 0$

Установившееся (не зависящее от времени) потенциальное течение

Если жидкость идеальная (т.е. ее вязкость η = 0), то отсутствует внутреннее трение, поэтому течение безвихревое, ламинарное.
Тогда **компоненты скорости** $\boldsymbol{v}$ могут быть выражены независимо друг от друга. Для этого вводят новую скалярную функцию Ф = Ф *(x,y,z)* - **потенциал скорости** - так, что:

$$v_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; v_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}; v_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

т.е. $\boldsymbol{v} = -\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$ $\qquad \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{grad}\ \Phi = -\nabla\Phi$

Подставляем эти выражения в уравнение неразрывности (2), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$ **уравнение Лапласа**

или: $div\ grad\ \Phi = 0$
$\nabla^2\Phi = 0$
$\Delta\Phi = 0$

2D уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (3)$$

+ граничные условия
1-го рода (для Ф)
2-го рода (для v)

Уравнение (3) аналогично ур-ию Пуассона (1), при A=0 в правой части
Дискретизация **уже выполнена**.

Смешанные граничные условия

Задаем другие граничные условия (для скорости)

На **верхней и нижней** границах: постоянство потенциала $1 \underset{L_{k,k}}{\cdot} \Phi_{i,j} \underset{s_k}{=} \Phi_b \underset{R_k}{}$

(i=1) (i=N_y)

На **левой и правой** границах: постоянство скорости v

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}(0, y) = v_1, \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial x}(L_x, y) = v_2$$

В дискретном виде:

на левой (j=1)

$$v_1 = -\frac{\Phi_{i,2} - \Phi_{i,1}}{\Delta x}$$

$$-1 \underset{L_{k,k}}{*} \Phi_{i,1} + 1 \underset{L_{k,k+Ny}}{*} \Phi_{i,2} = -v_1 \underset{R_k}{*} \Delta x$$

на правой (j=N_x)

$$v_2 = -\frac{\Phi_{i,Nx} - \Phi_{i,Nx-1}}{\Delta x}$$

$$-1 \underset{L_{k,k-Ny}}{*} \Phi_{i,Nx-1} + 1 \underset{L_{k,k}}{*} \Phi_{i,Nx} = -v_2 \underset{R_k}{*} \Delta x$$

Алгоритм

1. Задание параметров модели
2. основной цикл по узлам сетки
   $j=1,\ldots,N_x$;
   $i=1,\ldots,N_y$
   вычисляем глобальный индекс k
   формируем матрицу системы:
   на границах: верх и низ – пост. потенциал
   на левой - **скорость** v1=10 и v2=10 (усл. ед.)
   во внутр. узлах прав.часть =0.
3. решаем матричное ур-ие (решение s_k с глоб. индексом)
4. пересчет из глобального индекса в узлы сетки
   $j=1,\ldots,N_x$;
   $i=1,\ldots,N_y$
   вычисляем глоб. индекс k
   присваиваем s_k в массив $\Phi_{i,j}$
5. рисуем $\Phi_{i,j}$ и скорость

